

DOI: 10.7652/xjtuxb201401003

球体表面受任意周期热扰动时 非傅里叶导热的求解与分析

赵伟涛^{1,2}, 吴九汇^{1,2}

(1. 西安交通大学机械学院, 710049, 西安; 2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为研究球体表面遭受任意周期温度变化这类非傅里叶传热情形下的热波传播特性, 采用双曲线型热传导方程来描述该超急速热传导问题。首先, 利用分离变量法和 Duhamel 积分原理, 得到了球体表面温度突然变化时和以简谐规律周期变化时这两种情况下的解析解; 然后, 在此基础上应用傅里叶级数展开法和叠加原理, 获得了球体表面温度任意周期变化时的非傅里叶热传导的温度场。利用得到的解析表达式进行数值模拟, 分析了不同热松弛时间、不同时刻和不同位置对温度响应的影响, 讨论了非傅里叶热传导模型所给出的温度响应与傅里叶热传导模型的差别。结果表明: 非傅里叶热传导模型所给出的温度响应曲线存在一系列有序的阶跃点, 其响应的幅值随着热松弛时间的减小而减小。这种方法能够处理许多在生产实际中具有周期边界条件的非傅里叶热传导问题。

关键词: 非傅里叶热传导; 周期变化; 温度响应; 球体; 解析解

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)01-0013-06

Solution and Analysis of Non-Fourier Heat Conduction in a Solid Sphere under Arbitrary Periodic Surface Thermal Disturbance

ZHAO Weitao^{1,2}, WU Jiuhui^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to investigate the characteristics of thermal wave propagating in a solid sphere under arbitrary periodic surface thermal disturbance, the hyperbolic heat conduction equation was employed to describe this problem involving high-rate change of temperature. When the solid sphere surface is subjected to a sudden temperature change or a harmonic temperature change, the analytic solution of this problem is obtained by using the separation of the variables method and the Duhamel's principle. Then the analytic solution of temperature field is achieved by using the Fourier series and the principle of superposition when the solid sphere surface is subjected to an arbitrary periodic temperature change. Using the obtained analytical solution, the temperature profiles of the solid sphere were analyzed, and the differences between the temperature response obtained by using the non-Fourier heat conduction model and that by using the Fourier model were discussed. The results show that there exists an orderly series of 'jump points' at temperature response curve which obtained by using the non-Fourier heat conduction model; and

the amplitude of the temperature wave attenuates with the decrease of thermal relaxation. This solution can be applied for more realistic periodic boundary conditions occurring in engineering.

Keywords: non-Fourier heat conduction; periodic changes; temperature responses; solid sphere; analytical solution

自从17世纪傅里叶建立了导热的数学模型,傅里叶定律随之被广泛地应用于导热问题分析的各个领域。对于热作用时间较长的稳态传热过程以及过程发生的时间不是非常短的非稳态常规传热过程,采用傅里叶定律来描述热流密度与温度梯度之间的关系是可以满足精度要求的。但是,傅里叶定律不涉及热流密度与时间的关系,隐含了热扰动传播速度为无限大的假设。随着科学技术的进步,超短激光脉冲的出现和制冷水平的提高,存在着极高(低)温条件下的传热问题和超急速传热问题,使得傅里叶定律中的准平衡条件假设不再成立^[1-2]。

为了克服傅里叶定律的局限性,Cattaneo 和 Vernotte 分别独立地提出了具有热流延迟相的非傅里叶热传导模型,计及热流变化率对热传导的影响,其修正后的热传导方程为^[3-4]

$$\mathbf{q} = -k \nabla T - \tau_0 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{q}$ 是热流矢量; T 为温度; k 为热传导率; t 是时间; τ_0 为热松弛时间。方程(1)结合能量守恒方程得到以温度描述的双曲线型热传导方程

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (2)$$

式中: $a = k/(\rho c)$ 为热扩散系数; ρ 为密度; c 为常应变比热容。

为描述热以有限速度传播这一超常规热传导现象,研究者们对方程(2)在不同初始条件和边界条件下进行了求解。周凤玺等采用双相延迟模型,研究了平板在周期温度激励下的温度响应^[5]。Sarkar 采用 Laplace 变换技术研究了由介电材料制成的有限平板的双曲线型热传导问题^[6]。Tang 求解了表面周期性加热条件下有限介质的非傅里叶热传导问题^[7]。Moosaie 在 Tang 的工作基础上,运用傅里叶积分表达式,求解了有限介质在周期表面热扰动条件下的非傅里叶热传导问题^[8]。Barletta 分析了无限圆柱体存在内热源以及与外界流体有热对流的情况下的双曲线型热传导问题^[9]。Atafi 使用分离变量法求解了边界条件不随时间变化的无限长圆筒的非傅里叶温度场^[10]。Mishra 运用格子 Boltzmann 法研究了一维圆柱和球体的非傅里叶热传导问

题^[11]。Jiang 运用 Laplace 变换法研究了空心球体在内外两个表面温度突然变化时的双曲线型热传导问题^[12]。Shirmohammadi 采用分离变量法得到空心球体在周期表面热流条件下的解析解^[13]。

本文首先采用 Duhamel 积分和分离变量法分析了方程在球体表面温度突变边界条件和简谐变化边界条件这两类特殊情况下解的形式,在此基础上应用傅里叶级数展开法和叠加原理研究了任意周期边界条件下的解。按照这些表达式,不同周期边界条件下球体的双曲线型热传导行为得到分析和研究。这为工程应用和数值计算的验证提供了便利。

1 数学模型

考虑一半径为 r_0 、热物性为常数的球体,假设其初始温度 $T(r, 0) = 0$, 从 $t = 0$ 时起,球体外表面 $r = r_0$ 处遭受一温度为 $f_0 f(t)$ 的作用。在不考虑内热源和忽略热对流与热辐射的情况下,一维球体的双曲线型热传导方程为

$$\tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2a}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3)$$

其边界条件为

$$\left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T(r_0, t) = f_0 f(t) \quad (4)$$

初始条件为

$$T(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{t=0} = 0 \quad (5)$$

式中: $f_0 f(t)$ 为任意给定的函数。

为了获得控制方程(3)~(5)的归一化形式,特引入以下归一化量

$$\bar{T} = \frac{T}{f_0}; \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}; \quad \bar{t} = \frac{at}{r_0^2}; \quad \bar{\tau}_0 = \frac{a\tau_0}{r_0^2} \quad (6)$$

为了书写简便,省掉归一化量符号上方的横线,则方程(3)~(5)归一化后为

$$\tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T(1, t) = f(t) \quad (8)$$

$$T(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{t=0} = 0 \quad (9)$$

2 分析求解

由于边界条件(8)中的 $f(t)$ 是任意函数,这就

使得直接求解方程(7)变得不可能。因此,首先假定 $f(t)$ 为一时间无关量 f , 求解此条件下的温度场; 其次运用 Duhamel 积分, 求解在任意函数 $f(t)$ 下的温度场。现在, 求解在边界条件 f 下方程(7)的定解。

设解

$$T(r, t) = \theta(r, t) + \omega(r, t) \quad (10)$$

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \omega(1, t) = f \quad (12)$$

$\omega(r, t)$ 要满足方程(11)和边界条件(12), 不妨设 $\omega(r, t) = Ar^2 + Br + C$ (A, B, C 是 3 个待定系数), 代入上式, 求出 A, B, C , 可得 $\omega(r, t) = f$ 。

$\theta(r, t)$ 的定解问题为

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \theta(1, t) = 0 \quad (14)$$

$$\theta(1, 0) = -f \quad (15a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (15b)$$

采用分离变量法求解偏微分方程(13), 令

$$\theta(r, t) = X(r)Y(t) \quad (16)$$

将式(16)代入方程(13), 得到以下两个方程

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dX}{dr} + \lambda^2 X = 0 \quad (17)$$

$$\tau_0 \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{dY}{dt} + \lambda^2 Y = 0 \quad (18)$$

其中 λ 为分离常数。球贝塞尔方程(17)在边界条件(14)下的本征值及相应的本征函数分别为

$$\lambda_n = n\pi \quad (19)$$

$$X_n(r) = \frac{C_n}{r^{1/2}} J_{\frac{1}{2}}(\lambda_n r) = C_n Q(\lambda_n r) \quad (20)$$

式中: $J_{\frac{1}{2}}(\lambda_n r)$ 为半奇数阶贝塞尔函数。

方程(18)在边界条件(15b)下的解为

$$G_n(t) =$$

$$\begin{cases} \left\{ \sinh\left(\frac{\beta_n t}{2\tau_0}\right) + \beta_n \cosh\left(\frac{\beta_n t}{2\tau_0}\right) \right\} e^{-\frac{t}{2\tau_0}}, & \beta_n \text{ 为实数} \\ \left\{ \sin\left(\frac{\beta_{1n} t}{2\tau_0}\right) + \beta_{1n} \cos\left(\frac{\beta_{1n} t}{2\tau_0}\right) \right\} e^{-\frac{t}{2\tau_0}}, & \beta_n = \beta_{1n} i \end{cases} \quad (21)$$

$$\beta_n = (1 - 4\tau_0 \lambda_n^2)^{1/2} \quad (22)$$

把式(20)和(21)代入方程(16)得

$$\begin{aligned} \theta(r, t) = & \sum_{n=1}^N C_n \left\{ \sinh\left(\frac{\beta_n t}{2\tau_0}\right) + \right. \\ & \left. \beta_n \cosh\left(\frac{\beta_n t}{2\tau_0}\right) \right\} e^{-\frac{t}{2\tau_0}} Q(\lambda_n r) + \end{aligned}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \left\{ \sin\left(\frac{\beta_{1n} t}{2\tau_0}\right) + \beta_{1n} \cos\left(\frac{\beta_{1n} t}{2\tau_0}\right) \right\} e^{-\frac{t}{2\tau_0}} Q(\lambda_n r) \quad (23)$$

式中: 当 $n \leq N$ 时, β_n 为实数。

式(23)满足边界条件(15a), 再利用特征函数(20)的正交性可得

$$\begin{aligned} C_n = & - \frac{\int_0^1 r^2 Q(\lambda_n r) dr}{\int_0^1 |\beta_n| r^2 Q^2(\lambda_n r) dr} f = \\ & \left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \right)^{1/2} \frac{\cos \lambda_n}{|\beta_n|} f = \xi_n f \end{aligned} \quad (24)$$

因此, 由方程(10)可得 $T(r, t)$ 的表达式

$$T(r, t) = R(r, t) f \quad (25)$$

$$R(r, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n G_n(t) Q(\lambda_n r) \quad (26)$$

方程(25)表示边界条件不随时间变化时的温度场, 当边界条件为任意随时间变化量 $f(t)$ 时, 运用 Duhamel 积分求解此条件下的温度场

$$T(r, t) = \int_0^t \frac{\partial R(r, t')}{\partial t'} f(t - t') dt' \quad (27)$$

把式(26)代入式(27)可得到表面温度任意变化时非傅里叶导热下球体内部的温度场分布

$$\begin{aligned} T(r, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n M_n(t) Q(\lambda_n r) \\ M_n(t) = & \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{\beta_n^2 - 1}{2\tau_0} \int_0^t \sinh\left(\frac{\beta_n t'}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t'}{2\tau_0}} f(t - t') dt', & \beta_n \text{ 为实数} \\ -\frac{\beta_{1n}^2 + 1}{2\tau_0} \int_0^t \sin\left(\frac{\beta_{1n} t'}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t'}{2\tau_0}} f(t - t') dt', & \beta_n = \beta_{1n} i \end{cases} \quad (29)$$

当 $\tau_0 \rightarrow 0$ 时, 方程(7)对应经典傅里叶导热的情形。此时, β_n 为实数, 式(29)变为

$$M_n(t) = \lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \frac{\beta_n^2 - 1}{2\tau_0} \int_0^t \sinh\left(\frac{\beta_n t'}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t'}{2\tau_0}} f(t - t') dt' \quad (30)$$

把式(22)代入式(30)进行整理得

$$M_n(t) = -\lambda_n^2 \int_0^t e^{-\lambda_n^2 t'} f(t - t') dt' \quad (31)$$

把式(31)代入式(28)可得经典傅里叶导热时球体内部的温度场。

3 结果分析与讨论

为了更好地理解不同边界条件下球体的温度场, 下面给出 3 个特殊的例子。

3.1 温度突变边界条件

当半径为 r_0 的球体表面遭受一大大小为 f_0 的突

然温度变化(边界条件为常数)时,归一化后

$$f(t) = 1 \quad (32)$$

此时,式(25)是方程(7)的解

$$T(r, t) = R(r, t) \quad (33)$$

对于傅里叶导热,当 $\tau_0 \rightarrow 0$ 时,方程的解为

$$T(r, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n Q(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t} \quad (34)$$

根据式(33),可以计算得到球体表面遭受一突然温度变化时球体内的温度分布。

图1给出了球体表面温度突变时,不同热松弛时间下球体内($r=0.5$ 处)温度随时间的变化曲线,以及采用式(34)得到的傅里叶热传导模型下的温度响应曲线。可以看出,当 $\tau_0=0.05, 0.20, 0.50$ 时,其温度分布曲线与典型的傅里叶温度分布曲线已不一致,尤其是当 $\tau_0=0.20, 0.50$ 时,温度以明显的热波形式向内传播,热传导的非傅里叶效应更加明显。从图1还可以发现,球体内部温度的升高可以超过边界上作用的温度,其幅值随着 τ_0 的增加而增加,这种现象在傅里叶导热中并不存在。

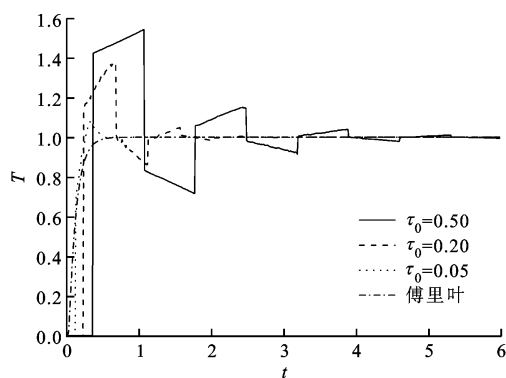


图1 球体表面温度突变时不同热松弛时间下的温度响应($f(t)=1, r=0.5$)

图2给出了球体表面温度突变和 $\tau_0=0.20$ 时,不同时间下球体内温度分布曲线。可以看出,其温

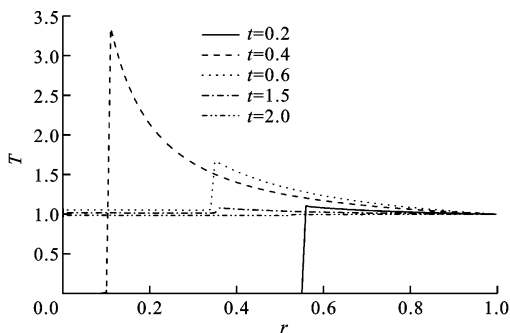


图2 球体表面温度突变时不同时刻下的温度响应($f(t)=1, \tau_0=0.20$)

度响应曲线均存在一明显的延迟,由于热波的传播速度为 $\tau_0^{-1/2}$,所以在位置 r 处,延迟时间为 $t_0 = \tau_0^{1/2}(1-r)$ 。

3.2 简谐变化边界条件

当半径为 r_0 的球体表面遭受一幅值为 f_0 、角频率为 α 的简谐温度变化时,归一化后

$$f(t) = \cos(\alpha t) \quad (35)$$

把式(35)代入式(28)、(29)得球体表面温度简谐变化时球体内部的温度场分布

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n M_n(t) Q(\lambda_n r) \quad (36)$$

$$M_n(t) = \begin{cases} \left\{ \frac{\beta_n^2 - 1}{(\beta_n^2 + 4\tau_0^2 \alpha^2 + 1)^2 - (4\beta_n \tau_0 \alpha)^2} \cdot \right. \\ \left[-(-\beta_n^2 + 4\tau_0^2 \alpha^2 + 1) \sinh\left(\frac{\beta_n t}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} + \right. \\ \left. \beta_n (\beta_n^2 + 4\tau_0^2 \alpha^2 - 1) \cosh\left(\frac{\beta_n t}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} + \right. \\ \left. 4\beta_n \tau_0 \alpha \sin(\alpha t) - \right. \\ \left. \left. \beta_n (\beta_n^2 + 4\tau_0^2 \alpha^2 - 1) \cos(\alpha t) \right] \right\}, \quad \beta_n \text{ 为实数} \\ \left\{ \frac{\beta_{1n}^2 + 1}{(\beta_{1n}^2 + 4\tau_0^2 \alpha^2 + 1)^2 - (4\beta_{1n} \tau_0 \alpha)^2} \cdot \right. \\ \left[(\beta_{1n}^2 + 4\tau_0^2 \alpha^2 + 1) \sin\left(\frac{\beta_{1n} t}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} + \right. \\ \left. \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - 4\tau_0^2 \alpha^2 + 1) \cos\left(\frac{\beta_{1n} t}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} - \right. \\ \left. 4\beta_{1n} \tau_0 \alpha \sin(\alpha t) - \right. \\ \left. \left. \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - 4\tau_0^2 \alpha^2 + 1) \cos(\alpha t) \right] \right\}, \quad \beta_n = \beta_{1n} i \end{cases} \quad (37)$$

对于傅里叶导热,当 $\tau_0 \rightarrow 0$ 时,把式(35)代入式(31)可得

$$M_n(t) = \frac{\lambda_n^4}{\lambda_n^4 + \alpha^2} \left\{ e^{-\lambda_n^2 t} - \cos(\alpha t) - \frac{\alpha}{\lambda_n^2} \sin(\alpha t) \right\} \quad (38)$$

把式(38)代入式(28)得傅里叶导热的温度分布

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^4 \xi_n}{\lambda_n^4 + \alpha^2} \left\{ e^{-\lambda_n^2 t} - \cos(\alpha t) - \frac{\alpha}{\lambda_n^2} \sin(\alpha t) \right\} Q(\lambda_n r) \quad (39)$$

使用式(36),可以计算得到半径为 r_0 的球体表面温度简谐变化时球体内的温度分布。图3给出了当球体表面温度简谐变化($\alpha=5, \tau_0=0.7$)时,球体不同位置处的温度响应,反映出了非傅里叶热传导的瞬态温度特性。从图3可以看出,每条曲线都存在一系列阶跃点,它们表示温度波波前经过边界的

传播和反射到达的时刻。由于热波的传播速度为 $\tau_0^{-1/2}$, 所以在 r 处, 阶跃点位置为 $t = \tau_0^{1/2}(1-r)$, $\tau_0^{1/2}(1+r)$, $\tau_0^{1/2}(3-r)$, $\tau_0^{1/2}(3+r)$, $\dots$, 由于扩散的作用, 温度波的阶跃值和幅值随着 r 的减小而减小。由图3还可看出, 同一位置的温度波曲线的阶跃点随着时间的增加而减小并逐渐消失, 曲线最终变成光滑的周期曲线。

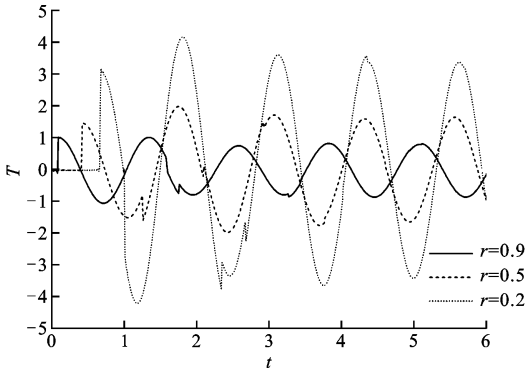


图3 球体表面温度简谐变化时不同位置处的温度响应 ($f(t) = \cos(\alpha t)$, $\alpha = 5$, $\tau_0 = 0.7$)

图4给出了在 $\alpha = 5$ 的情况下, 不同 τ_0 下球体内 ($r = 0.5$ 处) 温度随时间的变化曲线, 以及采用式(39)得到的傅里叶热传导模型下的温度响应曲线。从图中可以看出, 随着 τ_0 的减小, 热波的传播速度增大, 热量能够迅速地传递, 从而导致球体内温度响应的幅值也随之减小, 非傅里叶效应逐渐减弱。 τ_0 越小, 非傅里叶和傅里叶的温度响应曲线越接近。

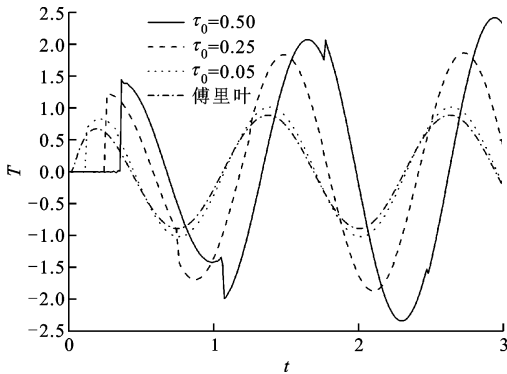


图4 球体表面温度简谐变化时不同热松弛时间下的温度响应 ($f(t) = \cos(\alpha t)$, $\alpha = 5$, $r = 0.5$)

3.3 任意周期边界条件

当半径为 r_0 的球体表面遭受任意周期温度变化时, 假设该周期函数 $f(t)$ 的周期为 $2l$ 。由 $f(t)$ 在实际中只能在 $t \geq 0$ 上有定义, 故可以在 $t < 0$ 的区间内将函数 $f(t)$ 进行偶延拓, 使 $f(t) = f(-t)$, 即延拓后的函数为偶函数。将此函数展开成傅里叶级

数, 这个级数必定是余弦级数。这样, 对于周期为 $2l$ 的周期函数 $f(t)$ 都可以展开成余弦级数的形式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \frac{i\pi t}{l} \quad (40)$$

式中: a_i 为傅里叶系数, 可以由三角函数的正交性计算得到

$$a_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{i\pi t}{l} dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

由于控制方程(7)、边界条件(8)和初始条件(9)都是线性的, 满足叠加原理, 为此可以先求方程(7)在满足以下边界条件情况下的解

$$\left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T(1, t) = a_i \cos(\alpha_i t) \quad (42)$$

$$\alpha_i = i\pi/l \quad (43)$$

当 $i \geq 1$ 时, 方程(7)在边界条件(42)和初始条件(9)下的解可以根据式(36)得到

$$T_i(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i \xi_n M_{ni}(t) Q(\lambda_n r), \quad i \geq 1 \quad (44)$$

$$M_{ni}(t) = \begin{cases} \left\{ \frac{\beta_n^2 - 1}{(\beta_n^2 + 4\tau_0^2 \alpha_i^2 + 1)^2 - (4\beta_n \tau_0 \alpha_i)^2} \cdot \right. \\ \left[-(\beta_n^2 + 4\tau_0^2 \alpha_i^2 + 1) \sinh\left(\frac{\beta_n t}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} + \right. \\ \left. \beta_n (\beta_n^2 + 4\tau_0^2 \alpha_i^2 - 1) \cosh\left(\frac{\beta_n t}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} + \right. \\ \left. 4\beta_n \tau_0 \alpha_i \sin(\alpha_i t) - \right. \\ \left. \left. \beta_n (\beta_n^2 + 4\tau_0^2 \alpha_i^2 - 1) \cos(\alpha_i t) \right] \right\}, \quad \beta_n \text{ 为实数} \\ \left\{ \frac{\beta_{1n}^2 + 1}{(\beta_{1n}^2 + 4\tau_0^2 \alpha_i^2 + 1)^2 - (4\beta_{1n} \tau_0 \alpha_i)^2} \cdot \right. \\ \left[(\beta_{1n}^2 + 4\tau_0^2 \alpha_i^2 + 1) \sin\left(\frac{\beta_{1n} t}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} + \right. \\ \left. \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - 4\tau_0^2 \alpha_i^2 + 1) \cos\left(\frac{\beta_{1n} t}{2\tau_0}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} - \right. \\ \left. 4\beta_{1n} \tau_0 \alpha_i \sin(\alpha_i t) - \right. \\ \left. \left. \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - 4\tau_0^2 \alpha_i^2 + 1) \cos(\alpha_i t) \right] \right\}, \quad \beta_n = \beta_{1n} i \end{cases} \quad (45)$$

当 $i = 0$ 时, 方程(7)的解可以由式(33)得到

$$T_0(r, t) = \frac{a_0}{2} R(r, t) \quad (46)$$

把式(44)与式(46)进行叠加, 可得球体表面温度任意周期变化时的非傅里叶温度场

$$T(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(r, t) \quad (47)$$

当 $\tau_0 \rightarrow 0$ 时, 根据叠加原理与式(34)、(39), 可得在任意周期边界条件下的傅里叶导热温度场

$$T(r, t) = \frac{a_0}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n Q(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^4 \xi_n a_i}{\lambda_n^4 + \alpha_i^2} \left\{ e^{-\lambda_n^2 t} - \cos(\alpha_i t) - \frac{\alpha_i}{\lambda_n^2} \sin(\alpha_i t) \right\} Q(\lambda_n r) \quad (48)$$

4 结 论

本文首先通过分离变量法和 Duhamel 积分原理,对球体表面温度突然变化和以简谐规律周期变化时这两类边界条件下的非傅里叶热传导问题进行了分析求解,在此基础上,利用傅里叶级数展开法和叠加原理,得到了双曲线型热传导方程在球体表面温度任意周期变化时这个最一般情况下的解析解。通过理论计算与数值模拟,展示了非傅里叶热传导模型所给出的温度响应与傅里叶热传导模型的如下差别:

(1) 温度响应曲线存在一系列的阶跃点,它们依次出现的时间为 $t = \tau_0^{1/2} (1 - r), \tau_0^{1/2} (1 + r), \tau_0^{1/2} (3 - r), \tau_0^{1/2} (3 + r), \dots$,但随着时间延长,其阶跃幅值逐渐减小,温度响应曲线逐渐变得光滑;

(2) 同一位置处,温度响应的幅值随着 τ_0 的减小而减小,最终趋近于傅里叶热传导时的温度响应;

(3) 热波具有有限的传播速度,其大小与 $\tau_0^{-1/2}$ 成线性关系。

参考文献:

- [1] TUNG T L, FONG E. Application of solution structure theorem to non-Fourier heat conduction problems: analytical approach [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2011, 54(23/24): 4796-4806.
- [2] 王颖泽, 张小兵, 宋新南. 圆柱外表面受热冲击问题的广义热弹性分析 [J]. 力学学报, 2012, 44(2): 317-325.
WANG Yingze, ZHANG Xiaobing, SONG Xinnan. Research on generalized thermoelastic problems of a solid cylinder subjected to thermal shock [J]. Acta Mechanica Sinica, 2012, 44(2): 317-325.
- [3] CATTANEO C. Sulla conduzione del calore [J]. Atti del Seminario Matematico e Fisico della Università di Modena, 1948, 3(3): 83-101.
- [4] VERNOTTE P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur [J]. Compute Rendus, 1958, 246(22): 3154-3155.
- [5] 周凤玺, 李世荣. 平板在周期温度激励下的非傅里叶温度响应 [J]. 西安交通大学学报, 2006, 40(7): 866-868.
ZHOU Fengxi, LI Shirong. Non-Fourier temperature response in a plate under periodic temperature boundary condition [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2006, 40(7): 866-868.
- [6] SARKAR D, HAJI-SHEIKH. A view of the thermal wave behaviors in thin plates [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2012, 39(8): 1009-1017.
- [7] TANG D W, ARAKI N. Non-Fourier heat conduction in a finite medium under periodic surface thermal disturbance [J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 1996, 39(8): 1585-1590.
- [8] MOOSAIE A. Non-Fourier heat conduction in a finite medium subjected to arbitrary periodic surface disturbance [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2007, 34(8): 996-1002.
- [9] BARLETTA A, ZANCHINI E. Thermal-wave heat conduction in a solid cylinder which undergoes a change of boundary temperature [J]. Heat and Mass Transfer, 1997, 32(4): 285-291.
- [10] ATEFI G, TALAEE M R. Non-Fourier temperature field in a solid homogeneous finite hollow cylinder [J]. Archive of Applied Mechanics, 2011, 81(5): 569-583.
- [11] MISHRA S C, SAHAI H. Analyses of non-Fourier heat conduction in 1-D cylindrical and spherical geometry: an application of the lattice Boltzmann method [J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2012, 55(23/24): 7015-7023.
- [12] JIANG F. Solution and analysis of hyperbolic heat propagation in hollow spherical objects [J]. Heat and Mass Transfer, 2006, 42(12): 1083-1091.
- [13] SHIRMOHAMMADI R, MOOSAIE A. Non-Fourier heat conduction in a hollow sphere with periodic surface heat flux [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2009, 36(8): 827-833.

(编辑 荆树蓉)